



تذكير لعموميات حول المتتاليات العددية و المتتاليات الحسابية و الهندسية

i. متتالية مكبورة - مصغرة - محدودة : (تذكير)

01. تعريف :

متتالية عددية $(u_n)_{n \geq n_0}$ و M و m عددين من \mathbb{R} .

- مكبورة ب M يكافئ $\forall n \geq n_0; u_n \leq M$ (أو $\forall n \geq n_0; u_n < M$)
- مصغرة ب m يكافئ $\forall n \geq n_0; m \leq u_n$ (أو $\forall n \geq n_0; m < u_n$)
- محدودة يكافئ إن u_n مكبورة ومحدودة .

02. مثال : نعتبر المتتالية العددية : $(w_n = \frac{n+3}{n+4})_{n \in \mathbb{N}}$. بين أن: w_n مكبورة ثم مصغرة على \mathbb{N} .

ii. رتبة متتالية :

01. تعريف :

متتالية عددية $(u_n)_{n \in I}$

- $\forall n, m \in I; n < m \Rightarrow u_n \leq u_m$ يكافئ I متتالية تزايدية على I
- $\forall n, m \in I; n < m \Rightarrow u_n \geq u_m$ يكافئ I متتالية تناقصية على I
- $\forall n, m \in I; u_n = u_m$ يكافئ I متتالية ثابتة على I

02. خاصية :

متتالية عددية $(u_n)_{n \in I}$

- $\forall n \in I; u_n \leq u_{n+1}$ يكافئ: I متتالية تزايدية على I
- $\forall n \in I; u_n \geq u_{n+1}$ يكافئ: I متتالية تناقصية قطعا على I
- $\forall n \in I; u_{n+1} = u_n$ يكافئ: I متتالية ثابتة على I

03. مثال :

نأخذ $w_1 = 1$ و $w_{n+1} = 1 + w_n$. أدرس رتبة w_n .

iii. المتتالية الحسابية :

01. تعريف :

متتالية عددية $(u_n)_{n \geq n_0}$

نقول إن u_n متتالية حسابية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم r وحدها الأول u_{n_0} يعني إن $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n = r$.

02. مثال: نعتبر المتتالية العددية الآتية : $u_n = 2n + 3; n \geq 0$. بين أن u_n متتالية حسابية وحدد عناصرها المميزة .

iv. صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

01. خاصية :

متتالية عددية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} . لدينا : $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.

02. خاصية :

متتالية عددية حسابية أساسها r إذا فقط إذا كان $\forall n, p \geq n_0 : u_n = u_p + (n - p)r$ (مع n و p من \mathbb{N})

03. أمثلة :

- مثال 1 : متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها u_7 . أحسب u_{2007} .
- مثال 2 : متتالية حسابية أساسها r وحدها $u_0 = 5$. أحسب $u_{100} = -45$. حدد r و u_n بدلالة n .

v. المجموع لحدود متتابعة لمتتالية حسابية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} . لدينا :

$$S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[\frac{u_n + u_p}{2} \right] \times (n - p + 1)$$

$$S_n = \frac{(\text{le premier terme}) + (\text{le dernier terme})}{2} \times (\text{عدد الحدود})$$

02. ملاحظة :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad \text{هناك } n+1 \text{ من الحدود}$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \quad \text{هناك } n \text{ من الحدود}$$

$$S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n \quad \text{هناك } n-1 \text{ من الحدود}$$

vi. متتالية هندسية :

01. تعريف :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية.

نقول إن u_n متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم q وحدها الأول u_{n_0} يعني ان $u_{n+1} = q \times u_n$ $\forall n \geq n_0$

vii. صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q وحدها الأول u_{n_0} . لدينا : $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$

02. خاصية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q إذا وفقط إذا كان $u_n = u_p \times q^{n-p}$ $\forall n, p \geq n_0$. (مع n و p من \mathbb{N})

03. تمرين :

viii. المجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية :

01. خاصية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية هندسية أساسها q وحدها الأول u_{n_0} . $n_0 \leq p < n$.

$$(1) \text{ لدينا : مع } q \neq 1 : S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[\frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1} \right] \times u_p$$

$$(2) \text{ لدينا : مع } q = 1 : S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = u_p + u_p + u_p + \dots + u_p = u_p (n - p + 1)$$



ix. المعدل الحسابي - المعدل الهندسي : ثلاثة حدود متتابعة .

01. المعدل الحسابي.

$u_i = a$ و $u_{i+1} = b$ و $u_{i+2} = c$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها r .

لدينا $u_i = u_{i+1} - r$ و $u_i = u_{i+1} + r$ ومنه $2u_{i+1} = u_i + u_{i+2}$.
خلاصة : $a + b = 2c$ وهي تسمى المعدل الحسابي .

02. المعدل الهندسي : إذا كانت u_n هندسية بالنفس الطريقة نحصل على: $a \times c = b^2$ تسمى المعدل الهندسي.

نهاية متتالية

A. نهاية منتهية لمتتالية

01. نشاط:

نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_n = \frac{1}{n}; n \geq 2$

على المستقيم العددي نأخذ المجال المفتوح $I_0 =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ الذي مركزه 0 . وحدة القياس 2cm .

أ - مثل المجال على المستقيم العددي.

ب - أحسب بعض الحدود و مثلها على المستقيم العددي.

ج - ماذا تلاحظ ؟

د - إذا كانت n تؤول إلى $+\infty$. ماذا يمكن أن نقول عن قيم u_n ؟

02. مفردات و رموز :

▪ نقول إن نهاية المتتالية u_n هي 0 عندما تؤول n إلى $+\infty$

▪ نكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

03. تعريف:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية.

نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي العدد الحقيقي l إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$

ابتداء من رتبة معينة.

نكتب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

04. ملاحظة:

▪ إذا كان للمتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ نهاية فهذه النهاية وحيدة .

▪ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^i} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ و $(i \in \mathbb{N}^*)$

▪ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

05. مثال:

لنعتبر المتتالية $u_n = \frac{1}{n} + 3; n \geq 1$. نبين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3 - 3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

B. نهاية لا منتهية لمتتالية:

01. تعريف:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية.

▪ نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي $+\infty$ إذا كان كل مجال على شكل $]A, +\infty[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ابتداء

من رتبة معينة. نكتب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

▪ نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي $-\infty$ إذا كان كل مجال على شكل $]-\infty, A[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ابتداء

من رتبة معينة. نكتب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

06. ملاحظة:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \text{ و } (i \in \mathbb{N}^*); \lim_{n \rightarrow +\infty} n^i = +\infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

تقارب متتالية عددية :

01. تعريف:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية.

▪ إذا كانت نهاية المتتالية u_n منتهية نقول إن المتتالية متقاربة.

▪ إذا كانت نهاية المتتالية u_n غير منتهية أو u_n ليس لها نهاية نقول إن المتتالية u_n متباعدة.

02. مثال:

▪ $u_n = n^4$. لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ إذن u_n متباعدة. $u_n = (-1)^n$ ليس لها نهاية: u_n هي متباعدة.

العمليات على نهايات المتتاليات- المتتاليات والترتيب

01. العمليات:

ملاحظة: لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ و $(v_n)_{n \geq n_0}$ متتاليتين عدديتين.

▪ العمليات على المتتاليات هي نفس العمليات على الدوال العددية.

$$\text{مثال: } (u_n)_{n \geq n_0} + (v_n)_{n \geq n_0} = (u_n + v_n)_{n \geq n_0}$$

▪ الخصائص العمليات على نهايات المتتاليات العددية هي نفس خصائص النهايات على الدوال.

$$\text{مثال أ: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' \text{ فإن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$$

$$\text{مثال ب: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

02. الترتيب:

▪ إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$ فإن $l' < l$ و إذا كان $u_n > 0$ فإن $l > 0$

03. تطبيق:

(1) أحسب نهاية المتتالية التالية: $u_n = \frac{1}{n} + 3; n \geq 1$

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

(2) أحسب نهاية المتتالية التالية: $v_n = \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n}; n \geq 1$

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right) = 3$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n} = +\infty$

مصادق التقارب-

01. نشاط:

p عدد صحيح طبيعي معلوم لكل عدد صحيح طبيعي n حيث $n \geq p$ فهو يحقق العلاقة (1).

نعر عنه ب: ابتداء من الرتبة p لدينا العلاقة (1).

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ و $(v_n)_{n \geq n_0}$ و $(w_n)_{n \geq n_0}$ متتاليات عددية حيث ابتداء من الرتبة p (مع $p \geq n_0$)

ماذا يمكن أن نستنتج في كل حالة من الحالات التالية:

▪ إذا كان: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ و $v_n \leq u_n \leq w_n$ ؟

▪ إذا كان: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ و $v_n \geq \alpha \cdot u_n$ (مع $\alpha > 0$) ؟

▪ إذا كان: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ و $v_n \leq \alpha \cdot u_n$ (مع $\alpha > 0$) ؟

▪ إذا كان: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ و $(\alpha > 0)$ $|v_n - l| \leq \alpha \cdot u_n$ ؟

02. مصاديق:

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ و $(v_n)_{n \geq n_0}$ و $(w_n)_{n \geq n_0}$ متتاليات عددية إذا كان ابتداء من الرتبة p ($\forall n \in \mathbb{N}; n \geq p$) يتحقق ما يلي:

1. إذا كان: $v_n \leq u_n \leq w_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

2. إذا كان: $v_n \geq \alpha \cdot u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

3. إذا كان: $v_n \leq \alpha \cdot u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

4. إذا كان: $|v_n - l| \leq \alpha \cdot u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.

مع $\alpha > 0$ و p عدد صحيح طبيعي معلوم ($p \geq n_0$) و $l \in \mathbb{R}$.

03. أمثلة:

1. مثال للمصادق 1:

نعتبر المتتالية العددية المعرفة ب: $v_n = \frac{(-1)^n}{n} - 5$; $n > 0$

نبين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$.

لدينا: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ إذن: $\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

ومنه: $\frac{-1}{n} - 5 \leq \frac{(-1)^n}{n} - 5 \leq \frac{1}{n} - 5$

و بالتالي: $\frac{-1}{n} - 5 \leq v_n \leq \frac{1}{n} - 5$

ولدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} - 5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 5 = -5$

ومنه: حسب أحد مصاديق التقارب نحصل: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$

خلاصة: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$

2. مثال للمصادق 2:

نعتبر المتتالية العددية المعرفة ب: $u_n = 2n + \cos(n)$; $n \geq 0$ أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

لدينا: $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \leq 2n + \cos(n) \leq 2n + 1$

ومنه: $2n - 1 \leq u_n \leq 2n + 1$ أي $2n - 1 \leq u_n \leq 2n + 1$

ونعلم بأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 1 = +\infty$ إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

خلاصة: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + \cos(x) = +\infty$

3. مثال للمصادق 4:

نعتبر المتتالية العددية المعرفة ب: $v_n = \frac{\cos n}{n}$; $n \geq 1$ نبين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

لدينا: (لأن $|\cos n| \leq 1$) $\left| \frac{\cos n}{n} \right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n}$

ومنه: $\left| v_n - 0 \right| \leq \frac{1}{n}$ وبما أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

تمرين: أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n + 5}{n^3}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

04. خاصية:

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متقاربة.

05. مثال:

نعتبر المتتالية: $u_n = \frac{1}{n^3} + 7$; $n \geq 1$

(1) نبين أن: u_n مصغورة:

لدينا: $n \geq 1$ إذن $\frac{1}{n}$ موجب قطعاً أي $u_n > 0$ ومنه $0 < u_n$ وبالتالي u_n مصغرة بـ 0. خلاصة: u_n مصغرة بـ 0
(2) نبين أن: u_n تناقصية:

لكل $n \geq 1$ لدينا: $n+1 \geq n \Leftrightarrow (n+1)^3 \geq n^3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3} \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

ومنه: u_n تناقصية. خلاصة: حسب ما سبق u_n مصغرة بـ 0 و تناقصية إذن هي متتالية متقاربة.

10. ملحوظة:

- كل متتالية تزايدية و سالبة (أي مكبورة بـ 0) هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و موجبة (أي مصغرة بـ 0) هي متقاربة.

متتاليات خاصة:

A. متتالية على شكل: $u_n = a^n$ مع $a \in \mathbb{R}$.

01. خاصية:

- إذا كان $a > 1$ فإن: $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$.
- إذا كان $a = 1$ فإن: $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$.
- إذا كان $-1 < a < 1$ فإن: $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.
- إذا كان $a \leq -1$ فإن: a^n ليس لها نهاية.

02. أمثلة:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty$ لأن $a = 3 > 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < a = \frac{1}{2} < 1$.
- $(-1)^n$ ليس لها نهاية.
- تمرين: أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 8^n}{7^n}$

B. متتالية على شكل: $u_n = n^r$ مع $r \in \mathbb{Q}^*$.

01. خاصية:

- إذا كان $r < 0$ فإن: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r = 0$.
- إذا كان $r > 0$ فإن: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r = +\infty$.

02. مثال

▪ نعتبر المتتالية التالية: $u_n = \sqrt[7]{n^3}; n \geq 1$ أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

▪ نعتبر المتتالية التالية: $u_n = \sqrt[7]{n^{-3}}; n \geq 1$ أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

C. متتالية $(v_n)_{n \geq n_0}$ على شكل: $v_n = f(u_n)$

01. نشاط:

نعتبر الدالة: $f(x) = \frac{2x-5}{7x+4}$ والمتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ حيث $u_n = \frac{1}{n^3}$.

(1) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة ب: $v_n = f(u_n)$ أكتب v_n بدلالة n .

(2) أ - أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. ب - أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

(3) إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ استنتج علاقة بين $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و f و l .

(4) أعط الخاصية:

02. خاصية:

إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية و f دالة متصلة في l و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ($l \in \mathbb{R}$) فإن المتتالية $(v_n)_{n \geq n_0}$ المعرفة ب $v_n = f(u_n)$ هي

متقاربة و نهايتها تحقق ما يلي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(l)$.

تمرين: نضع $f(x) = \frac{5x-6}{x+3}$ و $u_n = \frac{\cos n}{n}; n \geq 1$

(1) أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(2) نعتبر $v_n = \frac{5 \cos n - 6n}{\cos n + 3n}; n \geq 1$ أكتب v_n بدلالة f و u_n .

(3) حدد النهاية التالية $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

D. متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ على شكل: $u_{n+1} = f(u_n)$

01. خاصية:

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و $f(I) \subset I$ و $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية حيث: $u_{n+1} = f(u_n)$

▪ $u_{n_0} \in I$ (حدها الأول من I).

▪ u_n متتالية متقاربة و نهايتها l .

فإن l هو حل للمعادلة $f(x) = x$. (أي l تحقق $l = f(l)$)

02. مثال:

نعتبر المتتالية: $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}; n \geq 0$ و $u_0 = 2$. نعتبر أن u_n متقاربة (u_n تزايدية و مكبورة ب).

(1) حدد مجموعة اتصال الدالة $f(x) = \sqrt{6+x}$.

(2) أعط جدول تغيرات f على D_f .

(3) نعتبر المجال $I = [0, 3]$ تحقق بأن $f(I) \subset I$ و $u_0 \in I$. حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.